OVER EEN RAADSEL MET TWEE ZANDLOPERS

KOEN DE NAEGHEL

Samenvatting. In deze nota zoeken we de oplossing van een klassiek raadsel. We bespreken enkele interpretaties en hun voor de hand liggende veralgemeningen. Onze oplossingen maken gebruik van elementaire getaltheorie: deling met rest van gehele getallen en de stelling van Bachet-Bézout. Het pocketboek waaruit we dit raadsel halen is Franstalig, en haalbaar als vakoverschrijdende samenwerking in het middelbaar onderwijs.

Soms lossen mensen raadsels op voor hun plezier, om de geest scherp te houden of gewoon om de tijd te doden. Elke krant heeft wel een rubriek met kruiswoordraadsels, sudoku's of andere breinbrekers. Zo kun je bij de betere dagbladhandel allerhande puzelboekjes kopen. Bij toeval vond de auteur zo'n raadselboekje in een *supermarché* te Reims (Frankrijk), waarvan de omslag hieronder is afgebeeld. Het boekje in zakformaat bevat 66 bekende en minder bekende raadsels. De variatie in taal en moeilijkheidsgraad geeft een spectrum aan raadsels die geschikt zijn voor het middelbaar onderwijs. Op pagina 53 van dat boek vonden we het volgende probleem terug.

48. *Passe-temps*

> *Vous disposez de deux sabliers: un gros permettant de chronométrer* 7 *min et un petit permettant de chronométrer de* 4 *min.*
> *Comment faire pour chronométrer* 9 *min?*

Noemen we A *le petit sablier* en B *le gros sablier*, dan kunnen we dit raadsel als volgt vertalen.

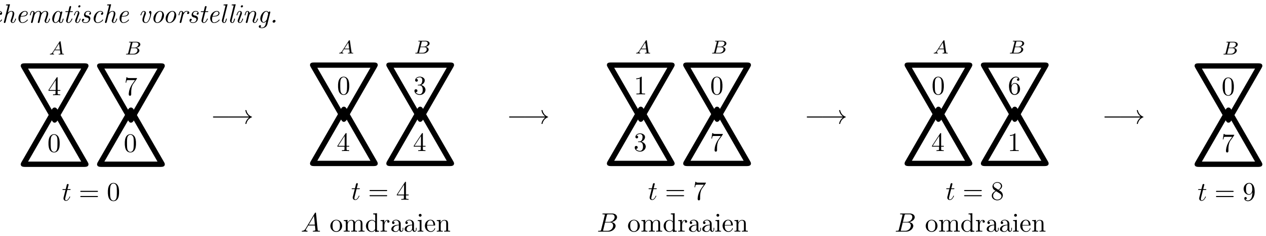
Raadsel 1. *Gegeven zijn twee zandlopers. Zandloper A loopt door in 4 minuten en zandloper B loopt door in 7 minuten. Toon aan dat je, door de zandlopers eventueel meermaals te laten doorlopen, precies 9 minuten kan afmeten.*

F. Mazza, *Pas de panique, c'est logique*, 2006 [2]

Toen de auteur dit probleem aan een kennis voorlegde, leidden onze bedenkingen op een terras van een *café* al snel tot een kritische kijk op de interpretatie van de opgave. Wordt er verwacht dat je de tijd start op het moment dat je de zandlopers omdraait? Of mag je zelf kiezen wanneer je de tijd op een welbepaald moment laat starten, ook al heb je een zandloper omgedraaid? Op basis van de Franse opgave kon geen van ons beiden de andere van zijn gelijk overtuigen, zodat we dan maar elk van de twee interpretaties afzonderlijk hebben opgelost.

Oplossing voor tijd meteen starten. Draai de twee zandlopers gelijktijdig om. Op het moment dat A doorgelopen is, zijn er al 4 minuten verstreken. Draai A meteen weer om. Op het moment dat B doorgelopen is, zijn er al 7 minuten verstreken en draai je B onmiddellijk om. Wanneer A een tweede keer doorgelopen is, zijn er al 8 minuten voorbij en resteren er nog 6 minuten in B. Draai nu B opnieuw om, ook al was die nog niet helemaal doorgelopen. Nu rest er nog 1 minuut in B. Wanneer B doorgelopen is, zijn er dus $4 + 3 + 1 + 1 = 9$ minuten voorbij.

Schematische voorstelling.

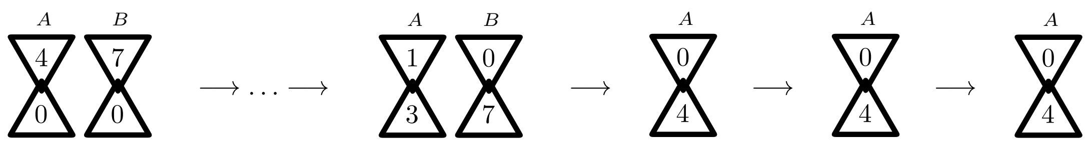


□

Datum: 23 maart 2018 (herwerkte versie), bedacht op 29 juni 2006. De auteur dankt Luc Van den Broeck voor zijn vereenvoudiging in onze oplossing van Raadsel 2.

Oplossing voor starttijd vrij kiezen. Draai de twee zandlopers gelijktijdig om. Telkens er een zandloper doorgelopen is, draai je die onmiddellijk terug om. Wanneer zandloper B negen keer doorgelopen is, zijn er 63 minuten verstreken. Op dat moment start je de tijd. Een minuut later is zandloper A voor de zestiende keer doorgelopen. Laat zandloper A nog twee keer doorlopen, daarna stop je de tijd. Zo heb je precies $(16\cdot 4 - 9\cdot 7) + 2\cdot 4 = 9$ minuten afgemeten.

Schematische voorstelling.



$t = -9\cdot 7$ $= -63$ | $t = 0$ | $t = 1$ A omdraaien | $t = 5$ A omdraaien | $t = 9$

□

Het raadselboek van Fabrice Mazza bevat ook de oplossingen van zijn opgaven, althans voor wat betreft zijn interpretatie ervan. Op pagina 121 ontdekten we dat de tijd blijkbaar start van zodra je de zandlopers aanraakt (onze eerste oplossing hierboven).

Voldaan bestelden we nog een *bière locale*. Toen het glas halfleeg was, vonden we onze tweede interpretatie (starttijd vrij kiezen) best interessant. We dachten namelijk dat we die methode konden veralgemenen. Zo bedachten we

Raadsel 2. *Gegeven zijn twee zandlopers en twee positieve natuurlijke getallen a, b met a en b relatief priem (dat wil zeggen: met positieve grootste gemene deler 1). De ene zandloper loopt door in a minuten, de andere in b minuten. Zij n een willekeurig positief natuurlijk getal. Meet, aan de hand van de twee zandlopers, n minuten af. Het tijdstip waarop je de n minuten begin af te meten is vrij te kiezen.*

Oplossing. Noem A de zandloper van a minuten en B de zandloper van b minuten. Zonder de algemeenheid te schaden, mogen we aannemen dat $a < b$. Indien $a = 1$ dan zijn we klaar, omdat we dan gewoon A precies n keer na elkaar laten doorlopen. Dus we mogen veronderstellen dat $a > 1$. Onze oplossing volgt nu uit twee stappen.

◇ **Stap 1.** *Als we ervoor kunnen dat we elk van de getallen $1, 2, 3, \ldots, a-1$ als resttijd van zandloper A kunnen krijgen, dan is het probleem opgelost.* Inderdaad, voeren we de deling met rest van a door n uit, dan verkrijgen we (unieke) natuurlijke getallen q en r waarvoor

$$n = qa + r \quad \text{en zodat} \quad 0 \le r \le a-1.$$

Dus als we r kunnen afmeten als resttijd van zandloper A, dan laten we eerst die rest doorlopen. Nadien laten we zandloper A gewoon q keer doorlopen. Op die manier meten we precies $r + qa = n$ minuten af.

◇ **Stap 2.** *Als $r \in \{1, 2, \ldots, a-1\}$ dan kunnen we zorgen dat de resttijd in zandloper A precies r minuten is.* Dit tonen we als volgt aan. Vermits a en b onderling ondeelbaar zijn, bestaan er wegens de stelling van Bachet-Bézout gehele getallen s en t waarvoor (zie bijvoorbeeld [1, pagina 16]):

$$sa + tb = 1. \tag{$*$}$$

Door eventueel bij het linkerlid een aantal keer $0 = ba + (-a)b$ toe te voegen, kunnen we ervoor zorgen dat $s > 0$. Daaruit volgt dan meteen dat $t < 0$. Hieronder beschrijven we nu een procedure om r minuten als resttijd in zandloper A te verkrijgen.

We starten met zandloper A en zandloper B gelijktijdig om te draaien. Telkens als één van de zandlopers leeg is, draaien we die onmiddellijk terug om. Wanneer zandloper B precies $-t > 0$ keer is doorgelopen, dan volgt uit $(*)$ dat zandloper A bijna s keer is doorgelopen. Meer bepaald, de resttijd in zandloper A is dan één minuut. Wanneer B precies $-2t$ keer is doorgelopen, zal de resttijd in A precies twee minuten zijn, enzovoort. Dus als we zandloper B in het totaal $-rt$ keer laten doorlopen, dan zal de resttijd in zandloper A precies r minuten zijn. Bedenk daarbij dat we gebruik gemaakt hebben van het feit dat $r < a$, want anders zou r geen geldige resttijd in A kunnen zijn: die zandloper bevat immers maar a minuten. Op die manier hebben we ervoor gezorgd dat de resttijd in zandloper A precies r minuten is. □

Schrijven we onze oplossing van Raadsel 1 (starttijd vrij te kiezen) uit met de notaties hierboven, dan vinden we:

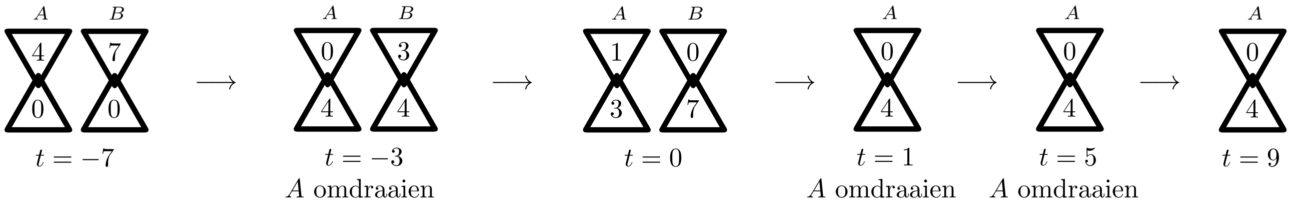
$$a = 4, \quad b = 7, \quad n = 9,$$
$$n = qa + r \text{ met } q = 2 \text{ en } r = 1,$$
$$sa + tb = 1 \text{ met bijvoorbeeld } s = 16 \text{ en } t = -9.$$

Nu passen we de procedure uit onze oplossing van Raadsel 2 toe. Dus we draaien beide zandlopers tegelijk om en laten zandloper B precies $-rt = 9$ keer doorlopen, terwijl we zandloper A telkens omdraaien als die leeg is. Op het moment dat B precies 16 keer is doorgelopen is, bedraagt de resttijd in A precies 1 minuut. Op dat moment starten we de tijd. Na het doorlopen van B laten we B nog $q = 2$ keer doorlopen, en verkrijgen zo de gewenste 9 minuten.

Nu zijn er nog andere lineaire combinaties van a en b die 1 opleveren, zoals bijvoorbeeld

$$sa + tb = 1 \text{ met } s = 2 \text{ en } t = -1.$$

Op die manier vinden we een eenvoudigere oplossing, die hieronder schematisch wordt weergegeven.



Nu wordt het een koud kunstje om ook andere zandlopers onder de loep te nemen, bijvoorbeeld een grote met 59 minuten en een kleine met 17 minuten, waarbij we precies 10 minuten willen afmeten. Schrijven we

$$15 \cdot 59 - 52 \cdot 17 = 1$$

dan moeten we de kleine zandloper eerst 520 keer laten doorlopen alvorens we in de grote zandloper een resttijd van 10 minuten krijgen. In het totaal ben je dan $520 \cdot 17 + 10 = 8850$ minuten bezig geweest. Tijdens die 6 dagen, 3 uren en 30 minuten is er geen tijd om even iets anders te doen, want iemand moet de zandlopers omdraaien wanneer ze leeggelopen zijn! Het loont de moeite om bij het linkerlid van de vergelijking hierboven $0 = -17 \cdot 59 + 59 \cdot 17$ op te tellen:

$$-2 \cdot 59 + 7 \cdot 17 = 1.$$

Een kleine aanpassing in onze oplossing van Raadsel 2 leidt tot de volgende procedure. We starten nog steeds met de zandlopers gelijktijdig om te draaien, en als er een zandloper leeggelopen is dan draaien we die meteen weer om. Wanneer de grote zandloper 20 keer doorgelopen is, zal de resttijd in de kleine zandloper precies 10 minuten zijn. Zo hoef je in het totaal slechts $20 \cdot 59 + 10 = 1190$ minuten te spenderen, wat nog geen 20 uren zijn. Een tijdwinst van ruim vijf dagen!

Nu op het terras van het *café* ook het derde streekbier genuttigd was, werd het tijd voor een *eau gazeuse*. Na deze kleine ontnuchtering waren we terstond in staat om Raadsel 2 en de hierboven beschreven oplossing te veralgemenen.

Raadsel 3. *Gegeven zijn twee zandlopers en twee positieve natuurlijke getallen a, b met als positieve grootste gemene deler d. De ene zandloper loopt door in a minuten, de andere in b minuten. Zij n een willekeurig positief natuurlijk getal. Toon aan dat we n minuten kunnen afmeten als en slechts als n een veelvoud is van d. Het tijdstip waarop je de n minuten begin af te meten is vrij te kiezen.*

Tot slot kent ook de originele interpretatie van Raadsel 1 een interessante studie. Jammer genoeg ging het *café* toen al dicht. Maar we nodigen de moedige lezer uit om bij zonnig weer zelf op terras te gaan en dit laatste raadsel in gezelschap op te lossen.

Raadsel 4. *Gegeven zijn twee zandlopers en twee positieve natuurlijke getallen a, b met als positieve grootste gemene deler d. De ene zandloper loopt door in a minuten, de andere in b minuten. Zij n een willekeurig positief natuurlijk getal. Bepaal alle natuurlijke getallen n waarvoor we n minuten kunnen afmeten. De meting start vanaf het moment dat men de zandlopers aanraakt.*

In plaats van met twee zandlopers te werken, kun je er ook drie, vier, vijf... nemen en nagaan hoeveel je minuten je daarmee kunt afmeten. De moeite waard om ook daar eens bij stil te staan!

Referenties

[1] K. De Naeghel, *Wiskunde Aanzet Deel XVI Getaltheorie*, LULU Press, 2015. Handboek online beschikbaar op de website `http://www.koendenaeghel.be`.

[2] F. Mazza, *Pas de panique, c'est logique*, Marabout - Hachette Livre, ISBN 2-501-04856-3, 2006.

Koen De Naeghel, Onze-Lieve-Vrouwecollege, Collegestraat 24, 8310 Brugge.
E-mail address, K. De Naeghel: `koendenaeghel@hotmail.com`